Zied GHARBI

Université Lumière Lyon2

Correction TD 3 : Probabilités

Licence 1 MIASHS

Exercice 1

Répondez au question dans chacune des situations suivantes :

1. Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts?
   Soit :
   - ⋆ E l'ensemble des trois entrées disponibles, $E = \{E1, E2, E3\} \rightsquigarrow Card(E) = 3$
   - ⋆ P l'ensemble des deux plats disponibles, $P = \{P1, P2\} \rightsquigarrow Card(P) = 2$
   - ⋆ D l'ensemble des quatre desserts disponibles, $D = \{D1, D2, D3, D4\} \rightsquigarrow Card(D) = 4$

   Le nombre de menus que l'on peut composer est donc égal à $card(E) \times card(P) \times card(D) = 3 \times 2 \times 4 = 24$
2. Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller?

   Cette femme peut s'habiller de $4 \times 5 \times 3 = 60$ façons
3. Deux équipes de hockeys de 12 et 15 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match : chaque joueur d'une équipe serre la main de chaque joueur de l'autre équipe. Combien de poignées de main ont été échangées?

   Il y a $12 \times 15 = 180$ poignées de main

Exercice 2

Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1. Calculer le nombre d'éléments de A.
   - ⋆ Le premier chiffre et non nul (1 à 9) : 9 possibilités.
   - ⋆ Le deuxième, troisième et quatrième chiffres peuvent être de 0 à 9 : 10 possibilités.

   Dans l'ensemble A il y a donc $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ chiffres possibles.
2. Dénombrer les éléments de A :

   (a) composés de quatre chiffres distincts
   - Le premier chiffre peut être choisi parmi 9 chiffres (1 à 9),
   - Le deuxième chiffre peut être choisi parmi 9 chiffres (0 à 9, excluant le premier chiffre),
   - Le troisième chiffre peut être choisi parmi 8 chiffres restants,
   - Le quatrième chiffre peut être choisi parmi 7 chiffres restants.

   Le nombre de nombres de quatre chiffres distincts est donc $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

   (b) composés d'au moins deux chiffres identiques.
   C'est le complément du nombre nombres composés de quatre chiffres distincts. Donc ce nombre est égal à $9000 - 4536 = 4464$

   (c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7
   - Le premier chiffre peut être choisi parmi 7 chiffres $(1, 2, 3, 4, 6, 8, 9)$,
   - Le deuxième chiffre peut être choisi parmi 8 chiffres restants $(0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9)$,
   - Le troisième chiffre peut être choisi parmi 7 chiffres restants,
   - Le quatrième chiffre peut être choisi parmi 6 chiffres restants.

   Donc le nombre de nombres composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 est égal à $7 \times 8 \times 7 \times 6 = 2352$

Exercice 3

En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?
L'ensemble $\Omega = \{0; 1\}$, donc le nombre de caractères qu'on peut coder est égal à $Card(\Omega)^8 = 2^8 = 256$

Exercice 4

A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr. . .) ?
Le podium est un arrangement de 3 athlètes choisis parmi l'ensemble des 18 athlètes (l'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant remporter deux médailles simultanément).

Il existe $A_{18}^3 = \dfrac{18!}{(18-3)!} = \dfrac{18!}{15!} = 18 \times 17 \times 16 = 4896$

Exercice 5

Un groupe d'élèves de terminale constitue le bureau de l'association " Bal des Terms : le succès ". Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien y a-t-il de bureaux possibles ? (il y a 24 élèves dans la classe)
Le fait d'attribuer un rôle à chaque élève de terminale induit un ordre dans le choix des trois élèves. En effet, le choix (Pierre, Paul, Jacques) est différent de (Paul, Pierre, Jacques), car dans le premier cas, c'est Pierre qui est président, alors que c'est Paul dans le deuxième cas).

Un bureau est donc un arrangement de 3 élèves choisis parmi l'ensemble des 24 élèves.

Donc il existe $A_{24}^3 = \dfrac{24!}{(24-3)!} = \dfrac{24!}{21!} = 24 \times 23 \times 22 = 12144$ bureaux différents.

Exercice 6

1. Un sac contient 5 billes de 5 couleurs différentes. J'en tire 2, combien de combinaisons de couleurs puis-je obtenir dans le cas d'un tirage avec et sans remise?

   $\rightsquigarrow$ $n = 5$ et $p = 2$

   - ⋆ sans remise :
     Il y a $C_n^p = C_5^2 = \binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ combinaisons de couleurs
   - ⋆ avec remise :
     Il y a $n^p = 5^2 = 25$ combinaisons de couleurs

2. Dans une assemblée composée de 10 personnes, il est décidé de nommer un comité de 4 personnes. Combien de comités peut-on envisager?

   $\rightsquigarrow$ $n = 10$ et $p = 5$, tirage sans remise.

   Donc il y a $C_n^p = C_{10}^4 = \binom{10}{4} = \dfrac{10!}{4!(10-4)!} = 210$ comités

Exercice 7

On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Déterminer la probabilité qu'elles soient toutes de la même couleur (toutes pique, toutes cœur, toutes carreau ou toutes trêfle).
$\rightsquigarrow$ Soient :

- ⋆ E = tirer 5 cartes de même couleur
- ⋆ E_1 = tirer 5 cartes toutes cœur

- $\star$ $E_2 =$ tirer 5 cartes toutes carreau
- $\star$ $E_3 =$ tirer 5 cartes toutes pique
- $\star$ $E_4 =$ tirer 5 cartes toutes trèfle

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1 \cup E_2 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) \\ &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} P(E_1) &= \frac{Card(E_1)}{Card(\text{Tirer 5 parmi 52})} = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{1287}{2598960} \approx 0.000495 \\ P(E_2) &= \frac{Card(E_2)}{Card(\text{Tirer 5 parmi 52})} = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{1287}{2598960} \approx 0.000495 \\ P(E_3) &= \frac{Card(E_3)}{Card(\text{Tirer 5 parmi 52})} = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{1287}{2598960} \approx 0.000495 \\ P(E_4) &= \frac{Card(E_4)}{Card(\text{Tirer 5 parmi 52})} = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{1287}{2598960} \approx 0.000495 \end{aligned}$$

Donc $P(E) = 4 \times 0,000495 = 0,00198$

Exercice 8

L'identité des malades est codée par un numéro d'anonymat sur 10 chiffres, chacun compris entre 0 et 9, sauf le chiffre des unités qui ne peut prendre la valeur 0. Combien de numéros d'identité différents peuvent être définis ? Justifier.
L'expérience est de choisir 9 chiffres et pour chaque chiffres il y a 10 chiffres possibles et le chiffre des unintés avec 9 chiffre possible

$$\text{nbre} = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 9 = 10^9 \times 9$$