Zied GHARBI

Université Lumière Lyon2

TD 5 : Loi usuelles continues
Licence 1 MIASHS

Exercice 1

Soit X est v.a. qui suit la loi uniforme sur l'intervalle I. Déterminer la fonction de densité de probabilité, puis calculer $P(1 \leq X \leq 3)$ pour les cas suivants :

1. $I = [1,\ 5]$
2. $I = [-2,\ 3]$

1. La fonction de densité de probabilité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4} & \text{si} \quad x \in [1,\ 5] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = \frac{3-1}{4} = 1/2$$

2. La fonction de densité de probabilité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-(-2)} = \frac{1}{5} & \text{si} \quad x \in [-2,\ 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = \frac{3-1}{5} = 2/5$$

Exercice 2

Soit X une v.a. qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-2,\ 2]$.

1. Calculer $P(X < 1)$ et $P(X \geq 0,5)$
2. Calculer $P_{(X>0)}(X < 1)$
3. Donner l'espérance de X

La fonction de densité de probabilité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-(-2)} = \frac{1}{4} & \text{si} \quad x \in [-2,\ 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. $P(X \leq 1) = \frac{1-(-2)}{4} = 3/4$

   $P(X \geq 0.5) = 1 - P(X \leq 0.5) = 1 - \frac{0.5-(-2)}{4} = 1 - 5/8 = 3/8$

2. $P_{(X>0)}(X < 1) = \frac{P(0 < X < 1)}{P(X > 0)} = \frac{\frac{1-0}{2-(-2)}}{1 - \frac{0-(-2)}{2-(-2)}} = \frac{1/4}{1-2/4} = 1/2$

3. $$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0$$

Exercice 3

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$. Donner les probabilités suivantes:

1. Probabilité que $X \leq 1,56$
   $P(X \leq 1.56) = F(1,56) \approx 0,9406$
2. Probabilité que $X < -1,1$
   $P(X < -1,1) = 1 - P(X < 1,1) = F(1,1) \approx 0.1357$
3. Probabilité que $X > 1,1$
   $P(X > 1,1) = 1 - P(X < 1,1) = F(1,1) \approx 0.1357$
4. Probabilité que $X \geq 1,023$
   $P(X \geq 1,023) = 1 - P(X < 1,023) = F(1,023) \approx 0.8461$
5. Probabilité que $X < 5$
   $P(X < 5) = F(5) \approx 1$
6. Probabilité que $-0,8 \leq X \leq 2,32$
   $P(-0,8 \leq X \leq 2,32) = F(2,32) - F(-0.8) = F(2,32) - [1 - F(0.8)] \approx 0.7779$

Exercice 4

Soit $X \sim \mathcal{N}(2,\ 4)$. Donner les probabilités suivantes:

1. $P(X \leq 1,56)$
2. $P(X > -1,1)$
3. $P(X \geq 2,5)$
4. $P(-0,8 \leq X \leq 2,32)$

Soit $X \sim N(2,4)$, c'est-à-dire que X suit une loi normale avec une moyenne $\mu = 2$ et une variance $\sigma^2 = 4$, donc un écart-type $\sigma = 2$.

1. Nous standardisons $X = 1,56$ comme suit :

$$Z = \frac{1,56 - 2}{2} = -0,22$$

$$P(Z \leq -0,22) = 1 - P(Z \leq 0,22) = 1 - 0,5871 \approx 0.4129$$

   Donc,

$$P(X \leq 1,56) \approx 0,4129$$

2. Nous standardisons $X = -1,1$ comme suit :

$$Z = \frac{-1,1 - 2}{2} = -1,55$$

   Nous cherchons $P(Z > -1,55)$, qui est :

$$P(Z > -1,55) = 1 - P(Z \leq -1,55) = 1 - (1 - P(Z \leq 1,55)) \approx 0,9394$$

   Donc,

$$P(X > -1,1) \approx 0,9394$$

3. Nous standardisons $X = 2,5$ comme suit :

$$Z = \frac{2,5 - 2}{2} = 0,25$$

$$P(Z \geq 0,25) = 1 - P(Z \leq 0,25) \approx 1 - 0,5987 \approx 0,4013$$

   Donc,

$$P(X \geq 2,5) \approx 0,4013$$

4. Nous standardisons les bornes :

$$Z_1 = \frac{-0.8-2}{2} = -1.4, \quad Z_2 = \frac{2.32-2}{2} = 0.16$$

Nous cherchons $P(-1.4 \leq Z \leq 0.16)$, qui est :

$$P(-1.4 \leq Z \leq 0.16) = P(Z \leq 0.16) - P(Z \leq -1.4) = P(Z \leq 0.16) - [1 - P(Z \leq 1.4)] \approx 0.5636 - 1 + 0,9192 \approx 0.4828$$

Donc,

$$P(-0.8 \leq X \leq 2.32) \approx 0.4828$$

Exercice 5

Soit $X \sim \mathcal{N}(2,\ 4)$. Trouver a tels que :

1. $P(X \leq a) = 0,775$
2. $P(X > a) = 0,005$

1. $$P(X \leq a) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}) = P(Z \leq \frac{a-2}{2}) = 0,77$$

   avec $Z \sim N(0,1)$ donc,

   $$\frac{a-2}{2} = 0,76 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2 \times 0,76 + 2 = 3,52$$

2. On sait que

   $$P(X \leq a) = 1 - P(X > a) = 1 - 0,005 = 0,995$$

   Alors

   $$P(X \leq a) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}) = P(Z \leq \frac{a-2}{2}) = 0,995$$

   avec $Z \sim N(0,1)$ donc,

   $$\frac{a-2}{2} = 2,57 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2 \times 2,57 + 2 = 7,14$$

Exercice 6

Dans un laboratoire pharmaceutique, une machine automatique fabrique en grande quantité des comprimés contenant un principe actif noté PA. On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout comprimé tiré au hasard, associe la masse de PA qu'il contient. On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $150mg$ et de variance $100mg$.

1. Dessinez la densité de probabilité de la variable aléatoire X. En déduire la probabilité que la masse de PA d'un comprimé tiré au hasard soit supérieure à $150mg$.

   $$X \sim N(\mu = 150,\ \sigma = 10)$$

   donc

   $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-150)^2}{200}}$$

   $$P(X > 150) = 1 - P(X \leq 150) = 1 - (Z \leq \frac{150-150}{10}) = 1 - 0.5 = 0.5$$

2. Quelle est la probabilité pour qu'un comprimé tiré au hasard :

   (a) ait une masse de PA supérieure à $160mg$?

$$P(X > 160) = 1 - P(X \leq 160) = 1 - P(X \leq \frac{160-150}{10}) = 1 - P(\leq 1) \approx 1 - 0,8413 \approx 0.1587$$

   (b) ait une masse de PA comprise entre $140mg$ et $170mg$?

$$\begin{aligned} P(140 \leq X \leq 170) &= P(\frac{140-150}{10} \leq Z \leq \frac{170-150}{10}) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) \\ &= P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1)] \\ &\approx 0.9772 - 1 + 0,8413 \approx 0.8185 \end{aligned}$$