# L’essentiel pour comprendre les TDs (récap)

Hadrien Bigo-Balland

## Base

- $P(A) \in [0,1] \quad ; \quad P(\Omega) = 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A) \approx \frac{\text{succès}}{\text{essais}}$ (fréquence)
- Cas équiprobables : $P(A) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas totaux}}$

## Opérations

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$
- Incompatibles : $P(A \cap B) = 0$
- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ou $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$

## Probabilités conditionnelles

- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad ; \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Bayes : $P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$

## Probabilités totales

- Si $B_1, \ldots, B_n$ partition : $P(A) =$ somme des $P(A \cap B_i) =$ somme des $P_{B_i}(A)P(B_i)$

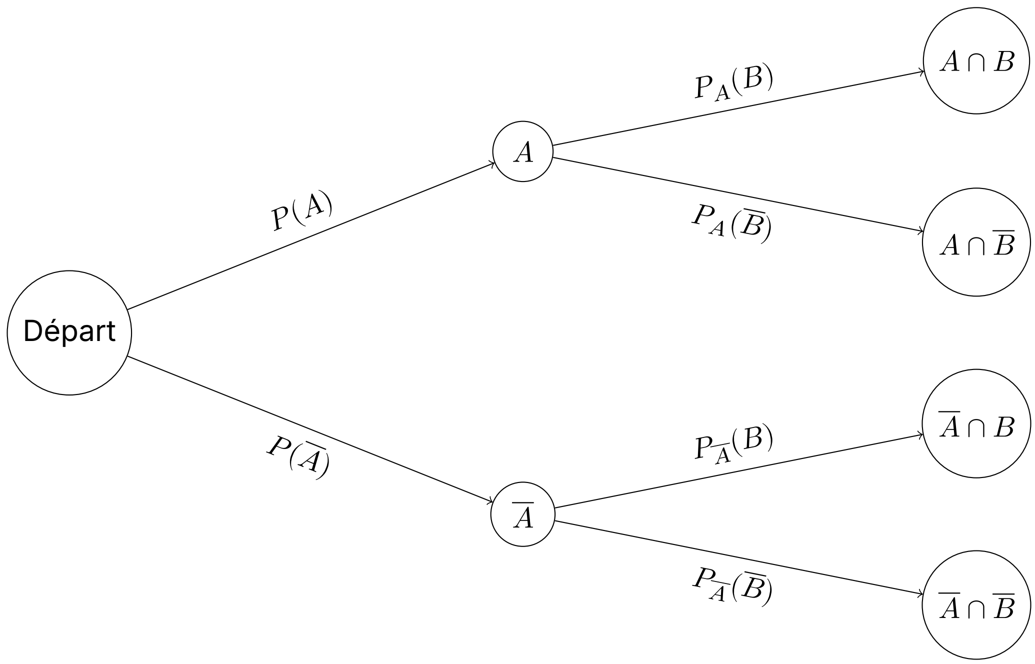
## Tableaux de probabilités (de contingence)

- **Chaque case** = $P(A_i \cap B_j)$ (conjointe)
- **Somme ligne** = $P(A_i)$ ; **Somme colonne** = $P(B_j)$ (marginales)
- Probabilité conditionnelle : $P_{A_i}(B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(A_i)}$

| | $A$ | $\overline{A}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $B$ | $P(A \cap B)$ | $P(\overline{A} \cap B)$ | $P(B)$ |
| $\overline{B}$ | $P(A \cap \overline{B})$ | $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ | $P(\overline{B})$ |
| Total | $P(A)$ | $P(\overline{A})$ | 1 |

## Arbres de probabilités

- Produit le long du chemin : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$
- Somme des chemins pour les unions




## Lois de probabilité

## Discrètes

**Bernoulli** $X \sim \mathcal{B}(p)$

- $P(X = 1) = p$ ; $P(X = 0) = 1 - p$
- $\mathbb{E}(X) = p$ ; Var$(X) = p(1 - p)$

**Binomiale** $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
- $\mathbb{E}(X) = np$ ; Var$(X) = np(1 - p)$

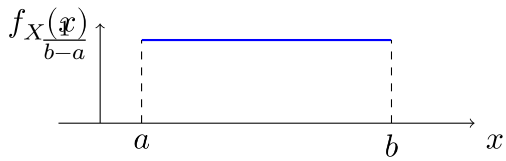
**Poisson** $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
- $\mathbb{E}(X) =$ Var$(X) = \lambda$

## Continues

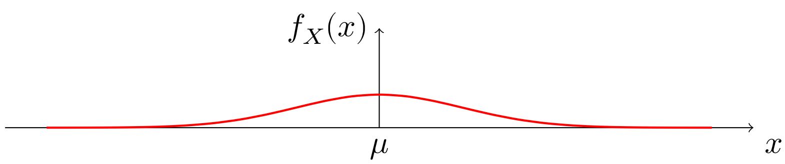
**Uniforme** $X \sim \mathcal{U}(a, b)$

- $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ sur $[a, b]$
- $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ ; Var$(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$




**Normale** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
- $\mathbb{E}(X) = \mu$ ; Var$(X) = \sigma^2$




## Tests statistiques

## Test du $\chi^2$ d'indépendance

- Pour tester l'indépendance de deux variables aléatoires.
- Hypothèses :
  - $H_0$ : variables indépendantes
  - $H_1$ : variables liées
- Effectifs attendus : $E_{ij} = \frac{\text{total ligne}_i \times \text{total colonne}_j}{\text{total général}}$
- Statistique : $\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$
- Degrés de liberté : $ddl = (\text{nb lignes} - 1)(\text{nb colonnes} - 1)$
- Décision : comparer à $\chi^2$ critique (table) au seuil $\alpha$ (souvent 5%)

### Test de Student (moyenne) :

- Pour comparer la moyenne $\mu$ d'un échantillon à une valeur $\mu_0$ de référence donnée.
- Hypothèses : $H_0 : \mu = \mu_0 \quad ; \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$
- Statistique : $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$
- ddl = $n-1$
- Décision : comparer $|t|$ à la valeur critique $t_{\alpha/2}$ de la table de Student